Στατ. Συμπερ. 15/4

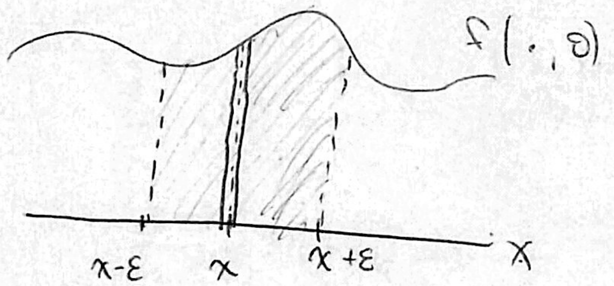
Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π) (~Fisher)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ $\downarrow$ $x_1, \dots, x_n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ανεξάρτητες} \\ + \\ \text{ισόνομες τ.μ} \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{πληθυσμό}}$ $f(x,\theta)$ $\theta \in \Theta$

με $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$)

όπου x_i, $i=1,\dots,n$ είναι η παρατηρούμενη τιμή του τ.δ.

Από κοινού κατανομή του τ.δ $f(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$ ①



$\varepsilon > 0$

Για ε πολύ κοντά στο 0 $P_\theta(x-\varepsilon \le X \le x+\varepsilon) \simeq f(x,\theta)$

Άρα ① $\Rightarrow f(\underline{x},\theta) \simeq P_\theta(x_1-\varepsilon_1 \le X_1 \le x_1+\varepsilon_1, \dots, x_n-\varepsilon_n \le X_n \le x_n+\varepsilon_n)$

(Παρατηρώ ότι το P_θ θα είναι "μεγάλο" αφού τα x_i, $i=1,\dots,n$ γνωρίζω ότι έχουν συμβεί. Οπότε ψάχνω εκείνο το θ για το οποίο μεγιστοποιείται το P_θ ή το $f(\underline{x},\theta)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ (Πιθανοφάνεια)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ όπου $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^m$) και έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρηθείσα τιμή του τ.δ $X_1, \dots, X_n$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας ή πιθανοφάνεια του $x_1, \dots, x_n$ θεωρείται συνάρτηση της θ και ορίζεται:

$$L = L(\theta) = L(\theta|\underline{x}) = f(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ε.Μ.Π)

Έστω $L(\theta)$ η πιθανοφάνεια του τ.δ $X_1, \dots, X_n$. Ο ΕΜΠ της παραμέτρου θ συμβολίζεται με $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ και ορίζεται:

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta) \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

Παρατήρηση

Βολεύει πολλές φορές αντί της μεγιστοποίησης της L, η μεγιστοποίηση του $\log L$ επειδή ο $\log$ είναι μονότονη συνάρτηση (αύξουσα). Άρα $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \{\log L(\theta)\}$

Παράδειγμα

1) Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθούν οι ΕΜΠ των μ, σ^2 στις ακόλουθες περιπτώσεις

(i) σ^2 γνωστό, $\mu = \theta$ άγνωστο

(ii) μ γνωστό, $\sigma^2 = \theta$ άγνωστο

(iii) μ, σ^2 άγνωστο.

Λύση

(i) $$L(\theta) \overset{\text{ορ}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \theta)^2} =$$

$$= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta)^2}$$

$$\log L(\theta) = -n \log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i, \theta)^2$$

$$\frac{d}{d\theta}\log L(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta) = 0 \Rightarrow n\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\log L(\theta)\Big|_{\theta = \bar{x}} < 0$$

Άρα $\hat{\theta} = \bar{x}$ μεγιστοποιεί την $\log L(\theta)$ άρα και την $L(\theta)$

Επομένως $\hat{\theta} = \bar{x}$ ΕΜΠ της $\theta = \mu$

Παρατήρηση

ΕΜΠ $\equiv$ ΑΟΕΔ

(ii) $L(\vartheta) \overset{\text{ορ}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} e^{-\frac{1}{2\vartheta}(x_i-\mu)^2} =$

$$= \frac{1}{(2\pi\vartheta)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\vartheta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\vartheta) - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log L(\vartheta) = -\frac{n}{2\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{d}{d\vartheta}\log L(\vartheta) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \vartheta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

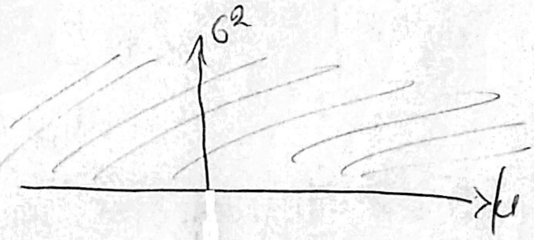
(Βρίσκω και την 2η παράγωγο και την βρίσκω στο συγκεκριμένο ϑ ότι είναι αρνητική.)

Άρα $\hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ ο ΕΜΠ της $\vartheta = \sigma^2$

<u>Παρατήρηση</u>

ο ΕΜΠ της $\sigma^2 \equiv$ ΑΟΕΔ

(iii) $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$



$L(\mu, \sigma^2) \overset{\text{ορ}}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} =$

$$= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log L(\mu, \sigma^2) = -\frac{\mu}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \log L(\mu, \sigma^2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \log L(\mu, \sigma^2) &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\underline{\text{Επιλύσεις πιθανοφάνειας}} \right) \Longrightarrow \begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Άρα ο ΕΜΠ των μ, σ^2 είναι $\bar{x}$ και $\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

<u>Παρατήρηση</u>

ΕΜΠ της $\mu \equiv$ ΑΟΕΔ ενώ ΕΜΠ της $\sigma^2 \not\equiv$ ΑΟΕΔ που είναι $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

2) Έστω τ.δ. $X_1, \ldots, X_n$ από Poisson (θ), $\theta > 0$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

<u>Λύση</u>

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

$$\log L(\theta) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log \theta - \log \prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\theta) = -n + \frac{\sum x_i}{\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta} \log L(\theta) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Άρα $\hat{\theta} = \bar{x}$ ο ΕΜΠ της $\theta \equiv$ ΑΟΕΔ

3) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $U[0, \theta]$, $\theta > 0$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

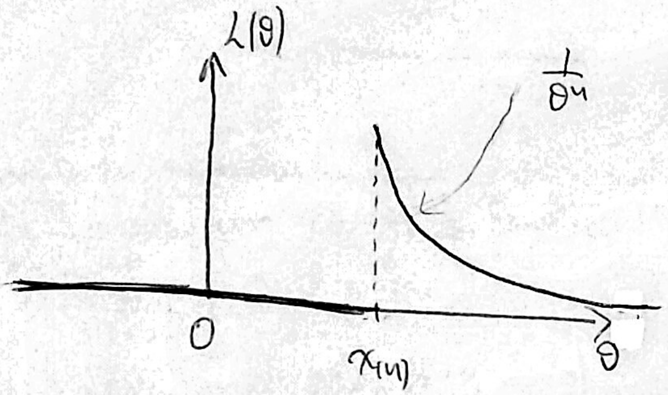
Λύση

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} \quad \forall x \in [0,\theta] \qquad \text{ή} \qquad f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \le x_i \le \theta \quad \forall i \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \Longrightarrow L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \theta \ge X_{(n)} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$X_{(n)} = \max x_i$



Άρα η L παίρνει μέγιστο στο $X_{(n)}$.

Συνεπώς ο ΕΜΠ $\hat{\theta} = X_{(n)}$ $(\equiv \text{ΑΟΕΔ})$

4) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $U[\theta, \theta+1]$, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

Λύση

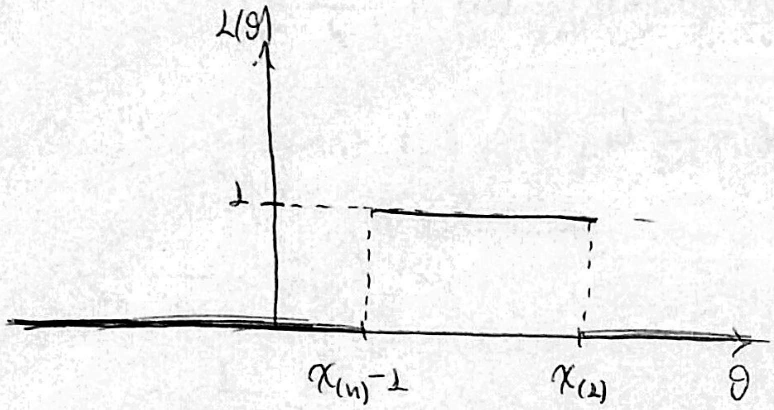
$$f(x,\theta) = \frac{1}{(\theta+1)-\theta} = 1 \quad \forall x \in [\theta, \theta+1]$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} 1 \cdot I_{[\theta,\theta+1]}(x_i) = \begin{cases} 1, & \theta \le x_i \le \theta+1 \quad \forall i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αφού $\forall i$ $\quad x_i \geq \theta$ $\quad$ τότε και $\quad x_{(1)} \geq \theta$

$\forall i$ $\quad x_i \leq \theta + 1$ $\qquad x_{(n)} \leq \theta + 1 \Rightarrow \theta \geq x_{(n)} - 1$

Συνεπώς $\quad L(\theta) = \begin{cases} 1 & , \ x_{(n)} - 1 \leq \theta \leq x_{(1)} \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases}$



Οποιοδήποτε $\theta \in [x_{(n)} - 1, \ x_{(1)}]$ μεγιστοποιεί την $L(\theta)$

Άρα υπάρχουν άπειροι ΕΜΠ της θ οποιοδήποτε $\hat{\theta}$ στο $[x_{(n)} - 1, x_{(1)}]$

π.χ. $\quad \hat{\theta} = X_{(n)} - 1$

$\hat{\theta} = X_{(1)}$

$\hat{\theta} = c\,(X_{(n)} - 1) + (1 - c)\,X_{(1)} \quad$ με $\quad 0 \leq c \leq 1$

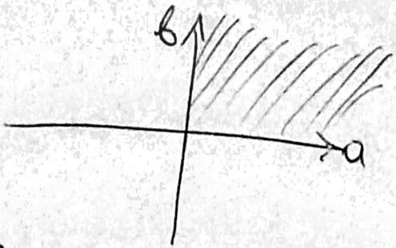
(Παρατηρώ ότι σε αντίθεση με τους ΑΟΕΔ οι ΕΜΠ δεν είναι μοναδικοί)

5) Έστω τ.δ από $G(a, b)$. Να βρεθούν ΕΜΠ των a, b.

<u>Λύση</u>

$$f(x, a, b) = \frac{1}{b^a \, \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x/b}, \quad a, b > 0, \quad x > 0$$

$\Theta = \{(a,b) : a, b > 0\}$



$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a, b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x_i^{a-1} e^{-x_i/b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(a,b) = \frac{1}{b^{na} \Gamma^n(a)} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\frac{1}{b}\Sigma x_i}$$

$$\log L(a,b) = -na \log b - n \log \Gamma(a) + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \log L(a,b) = -n \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n \log b + \sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \log L(a,b) = -\frac{na}{b} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial a} \log L(a,b) = 0 \\ \\ \frac{\partial}{\partial b} \log L(a,b) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} -n \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n \log b + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 & (1) \\ \\ ab = \bar{x} & (2) \end{array}$$

$$(2) \Rightarrow b = \frac{\bar{x}}{a} \quad (2')$$

$$(1) \text{ και } (2') \Rightarrow -n \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - n \log \frac{\bar{x}}{a} + \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \quad (3)$$

Από την επίλυση της (3) με αριθμητικές μεθόδους,

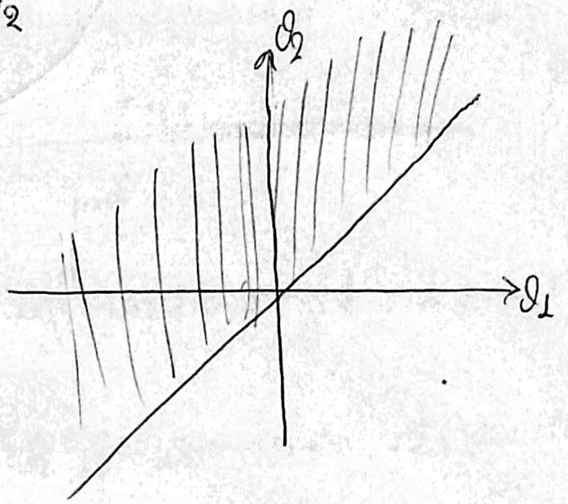
προκύπτει ο ΕΜΠ της a, ο $\hat{a}$

Έτσι ο ΕΜΠ της b θα είναι ο $\hat{b} = \frac{\bar{x}}{\hat{a}}$ λόγω της $(2')$

6) Εστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από $U[\vartheta_1, \vartheta_2]$, $\vartheta_1 < \vartheta_2$. Να βρεθεί ΕΜΠ των ϑ_1, ϑ_2

Λύση

$$f(x,\vartheta_1,\vartheta_2) = \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1}, \quad \vartheta_1 \le x \le \vartheta_2$$



$$\Theta = \{ (\vartheta_1,\vartheta_2) : \vartheta_1,\vartheta_2 \in \mathbb{R}, \vartheta_1 < \vartheta_2 \}$$

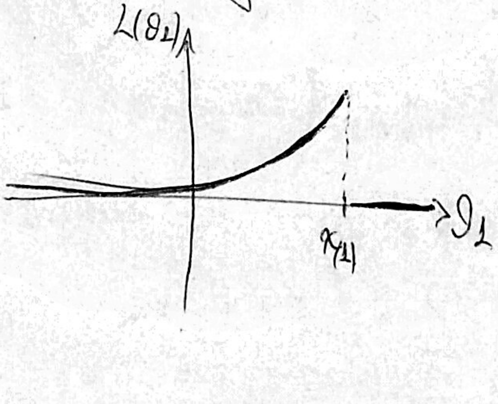
$$L(\vartheta_1,\vartheta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\vartheta_1,\vartheta_2) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta_2-\vartheta_1} I_{[\vartheta_1,\vartheta_2]}(x_i) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}, & \vartheta_1 \le x_i \le \vartheta_2 \ \forall i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}, & \vartheta_1 \le x_{(1)} = \min x_i \\ & \vartheta_2 \ge x_{(n)} = \max x_i \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Αν θεωρήσω την L συνάρτηση του ϑ_1 (ϑ_2 = σταθερό)

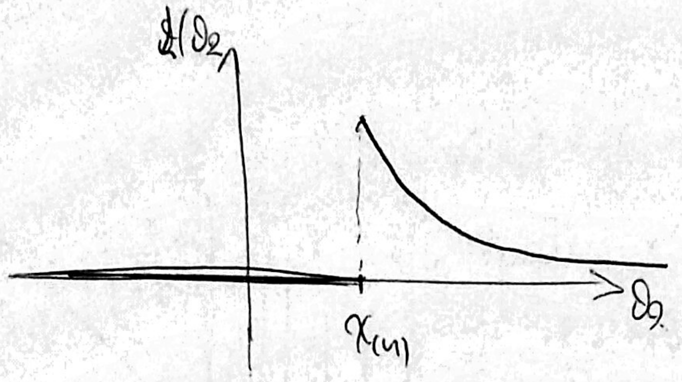
η $\frac{d}{d\vartheta_1} L > 0 \Rightarrow L \uparrow$ αύξουσα ως προς ϑ_1



Άρα η L μεγιστοποιείται για $\vartheta = x_{(1)}$

Αν θεωρήσω την L συνάρτηση του θ_2 (θ_1 = σταθερό)

η $\frac{d}{d\theta_2} L < 0 \Longrightarrow L \downarrow$ φθίνουσα ως προς θ_2



Άρα η L μεγιστοποιείται για $\theta = X_{(n)}$

Συνεπώς οι ΕΜΠ των θ_1, θ_2 είναι $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$, $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$

7) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από την Laplace κατανομή με σ.π.π

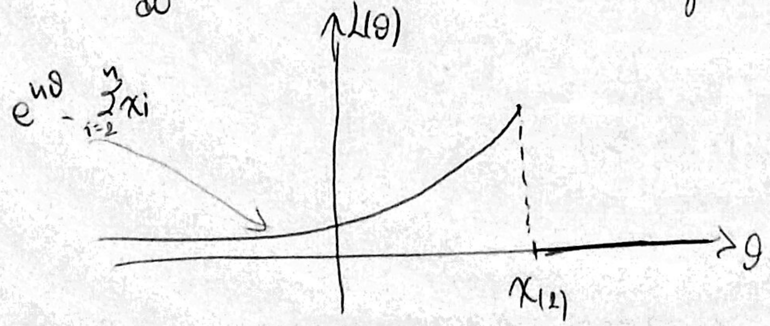
$f(x,\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

Λύση

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x_i) =$$

$$= \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta} & , \theta \leq x_i \ \forall i \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases} = \begin{cases} e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i} & , \theta \leq x_{(1)} \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = n e^{n\theta - \Sigma x_i} > 0 \quad \uparrow \text{ για } \theta \leq x_{(1)}$$



Άρα η $L(\theta)$ μεγιστοποιείται για $\hat{\theta} = X_{(1)}$

Άρα ΕΜΠ της θ είναι $\hat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

Άσκηση (για το σπίτι)

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta_1, \theta_2) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}}$

$\theta_1 < x < \theta_2$ με $\theta_1, \theta_2 > 0$. Να βρεθούν ΕΜΠ των θ_1, θ_2

Ιδιότητες ΕΜΠ

1) Ο ΕΜΠ είναι συνάρτηση του επαρκούς στατιστικού $T(\underline{x})$

Αφού το $T(\underline{x})$ είναι επαρκές $f(\underline{x}, \theta) = g[T(\underline{x}), \theta]\, h(\underline{x}) = L(\theta)$

2) Έστω $\hat{\theta}$ ο ΕΜΠ της θ και g μια 1-1 συνάρτηση. Τότε $g(\hat{\theta})$ είναι ο ~~αμερόληπτος~~ ΕΜΠ της $g(\theta)$

π.χ. στην κανονική $N(\mu, \sigma^2)$ ποιος είναι ο ΕΜΠ της $\mu + \sigma^2$?

Είναι ο $\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2$

3) Ασυμπτωτική Κατανομή των ΕΜΠ

Αν $\hat{\theta}$ ο ΕΜΠ της θ τότε (υπό κάποιες συνθήκες) τότε

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} N\left(0, \frac{1}{n I_X(\theta)}\right) \qquad \left| \mathcal{L} : \text{ασυμπτωτικά} \right)$$

Άρα για μεγάλα δείγματα ο ΕΜΠ $\equiv$ ΑΟΕΔ